

# Trayectorias espaciales a partir de curvas notables

Dr. Pablo Cetta  
Facultad de Artes y Ciencias Musicales de la U.C.A.  
Buenos Aires, Argentina  
[cetta.pablo@gmail.com](mailto:cetta.pablo@gmail.com)

## Introducción

En este artículo vamos a analizar algunas curvas en dos y tres dimensiones que por sus características destacables, su aplicación física o su estudio a lo largo del tiempo han adquirido notoriedad. Su utilización en el trazado de las trayectorias seguidas por las fuentes virtuales de una composición electroacústica puede resultar de interés. En particular, si consideramos que a partir de sus ecuaciones podemos vincular los recorridos espaciales con el comportamiento de otros parámetros sonoros y musicales.

Si bien las curvas notables son prácticamente innumerables, existen diversos tratados y recursos en línea que las agrupan y clasifican de acuerdo a sus propiedades<sup>1</sup>. A fin de poder visualizarlas y emplearlas en la localización espacial del sonido recurriremos a algunos programas didácticos que desarrollé -en el entorno *Pure Data*<sup>2</sup>, con uso de la librería *GEM*<sup>3</sup>- que servirán como punto de partida para la generación de trayectorias espaciales a emplear en la composición musical.

## Antecedentes

En 1972 John Chowning completa su obra electroacústica *Turenas*, generada íntegramente a partir de un programa realizado empleando el compilador acústico Music IV. En esta pieza se conjugan dos técnicas desarrolladas por el mismo compositor: la síntesis por frecuencia modulada y el movimiento de fuentes sonoras virtuales rodeando al oyente.

---

<sup>1</sup> Pueden consultarse, entre otros, los siguientes sitios, que no sólo conforman un interesante repositorio de curvas notables, sino que además citan una extensa bibliografía sobre el tema.

<http://curvebank.calstatela.edu/home/home.htm>

<http://www.2dcurves.com>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html>

[http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves\\_dir/specialPlaneCurves.html](http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html)

<sup>2</sup> <http://puredata.info>

<sup>3</sup> <http://gem.iem.at>

A fin de trazar las trayectorias que describen las fuentes sonoras, Chowning recurre a las denominadas figuras de Lissajous. Estas curvas fueron creadas en 1815 por Nathaniel Bowditch (1773-1838) -capitán de navío y matemático, recordado como el fundador de la navegación moderna<sup>4</sup>- quien las obtiene a partir de la experimentación con péndulos sostenidos por dos puntos fijos. Posteriormente, en 1865, el matemático francés Jules Antoine Lissajous (1822-1880) las estudia empleando un haz de luz proyectado sobre dos espejos, unidos a diapasones que oscilaban perpendicularmente.

Las figuras se obtienen a partir de la trayectoria que describe un punto, cuyas coordenadas rectangulares están dadas por dos movimientos oscilatorios armónicos, perpendiculares entre sí. Las curvas sobre un plano, en dos dimensiones, se obtienen a través de la siguiente ecuación paramétrica<sup>5</sup>

$$x(t) = a \cdot \cos(2\pi f_x t + \delta_x)$$

$$y(t) = b \cdot \cos(2\pi f_y t + \delta_y)$$

en la cual  $a$  y  $b$  son las amplitudes de las sinusoides que determinan las coordenadas  $x$  e  $y$ ,  $f_x$  y  $f_y$  son sus frecuencias,  $\delta_x$  y  $\delta_y$  son sus fases iniciales, y  $t$  es el tiempo.

La figura emblemática que suele reproducirse al hablar de *Turenas* es la dada por la ecuación paramétrica siguiente, en la cual  $t$  varía entre 0 y 2:

$$x = \sin(\pi t) + \sin(3\pi t)$$

$$y = \cos(1.5\pi t) + \cos(3.5\pi t)$$

La representación gráfica de la ecuación anterior puede verse en la figura 1.

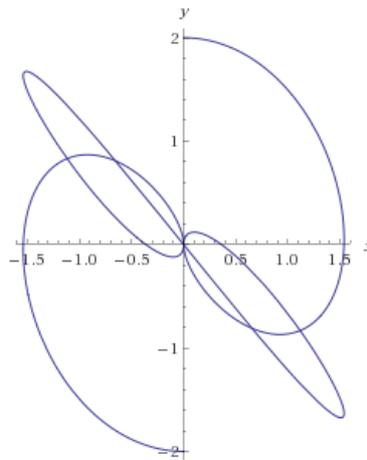
En rigor, según se observa en las fórmulas, no se trata de la combinación de dos movimientos armónicos simples, sino de dos movimientos oscilatorios complejos transversales, formados por dos

---

<sup>4</sup> N. Bowditch es autor de una enciclopedia sobre navegación marítima, oceanografía y meteorología que fue publicada originalmente entre 1802 y 1867. En 1867, la Armada de Estados Unidos adquirió los derechos para continuar la publicación de este tratado. Una versión digitalizada de la edición del bicentenario se encuentra disponible en [http://msi.nga.mil/MSISiteContent/StaticFiles/NAV\\_PUBS/APN/pub9.zip](http://msi.nga.mil/MSISiteContent/StaticFiles/NAV_PUBS/APN/pub9.zip) (última consulta 10/07/2015).

<sup>5</sup> Una ecuación paramétrica es un conjunto de funciones que poseen un número determinado de variables independientes, denominadas "parámetros". A modo de ejemplo, la ecuación de una circunferencia en coordenadas cartesianas está dada por  $x^2 + y^2 = r^2$ , donde  $r$  es el radio, y los valores de  $y$  se obtienen a partir de los de  $x$ , o viceversa. Una versión paramétrica de la ecuación de la circunferencia es  $x = r \cos t$  e  $y = r \sin t$ . En este caso, las coordenadas de los puntos que definen la curva dependen del parámetro  $t$  (cuando  $t$  varía entre 0 y  $2\pi$  se produce un giro completo).

componentes sinusoidales cada uno. Más adelante, al tratar el *harmonograph*, nos referiremos nuevamente a este tipo de ecuaciones.



**Figura 1.** Trayectoria característica empleada por John Chowning en *Turenas*

Según mencionamos antes, Chowning no sólo establece un procedimiento para generar trayectorias, sino que también desarrolla un modelo de espacialización para llevarlas a la práctica. Su sistema de localización espacial del sonido se basa en una disposición cuadrafónica, en la cual la lateralización es producida a partir del balance de intensidades entre pares contiguos de parlantes. Para este dispositivo incorpora, además, la reverberación global (reproducida igualmente en los cuatro canales), reverberación local (diferenciada para cada canal según la posición de la fuente) y la simulación del efecto Doppler, a fin de obtener un mayor grado de realismo. Según se observa en la

figura 2, tanto la amplitud de la reverberación global  $\left(\frac{1}{\sqrt{d}} \cdot \frac{1}{d}\right)$  como la reverberación local

$\left(\frac{1}{\sqrt{d}} \cdot \left(1 - \frac{1}{d}\right)\right)$  se establecen en relación con la distancia a la que se encuentra la fuente. En el caso

de la reverberación local, cada canal se ve afectado por los mismos coeficientes de amplitud usados para la lateralización. Por otra parte, la reproducción de reverberación decorrelacionada en cada parlante aumenta notablemente la verosimilitud de la simulación.

Para la tarea de ubicar espacialmente las fuentes virtuales utilizaremos una abstracción programada especialmente para este fin, que implementa el modelo de John Chowning en tiempo real. De ahí que nos hayamos detenido sobre este punto. Los programas de generación de trayectorias y de espacialización a utilizar pueden descargarse libremente de

[www.pablocetta.com/trayectorias\\_notables](http://www.pablocetta.com/trayectorias_notables)

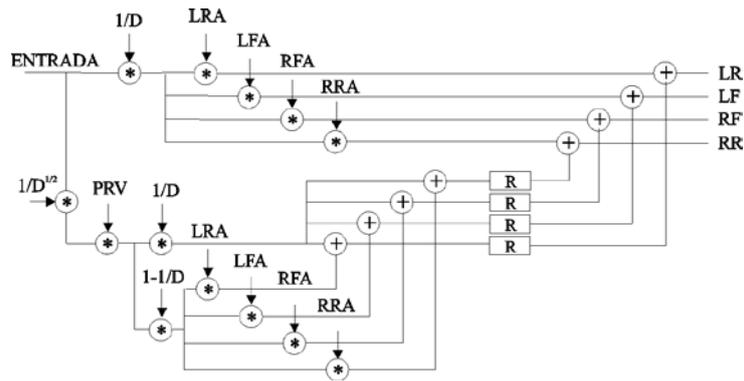


Figura 2. Espacializador cuadrafónico de Chowning

Otro antecedente relevante del empleo de curvas notables, esta vez musical-arquitectónico, es el sistema de curvas ideado por Iannis Xenakis y Le Corbusier para el diseño del Pabellón Phillips de la Exposición Mundial de Bruselas de 1958. El uso de paraboloides hiperbólicas en la construcción del *stand* proviene de parte de la estructura de *Metástasis* (1953-54), una de las obras musicales más destacadas del compositor greco-francés.

El paraboloides hiperbólico, también conocido como “silla de montar”, por su forma, posee la siguiente ecuación cartesiana:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - z = 0$$

Se trata de una superficie reglada, lo cual significa que se puede construir mediante rectas paralelas que varían su pendiente de acuerdo al contorno. Esta propiedad determinó que fueran tan utilizadas en arquitectura, dada la facilidad que presentan para su realización material<sup>6</sup>.

A continuación trataremos otras figuras notables que pueden servir a nuestros propósitos.

### Figuras de Lissajous en tres dimensiones

Las figuras de Lissajous pueden también ser representadas en el espacio. Para ello agregamos una tercera ecuación a las anteriores.

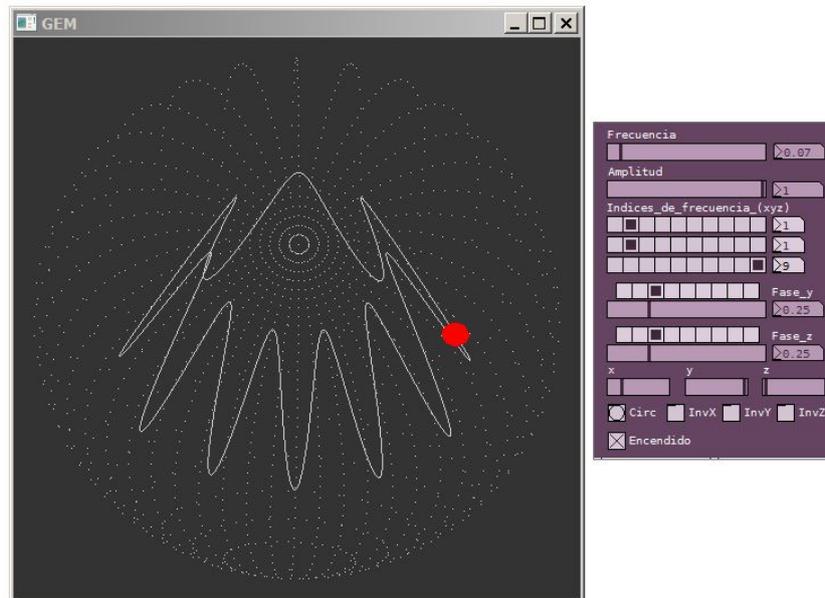
$$x(t) = a \cdot \cos(2\pi f_x t + \delta_x)$$

$$y(t) = b \cdot \cos(2\pi f_y t + \delta_y)$$

$$z(t) = c \cdot \cos(2\pi f_z t + \delta_z)$$

<sup>6</sup> Gaudí y Félix Candela, entre otros, han hecho uso de paraboloides hiperbólicos en sus obras. La “Sagrada Familia” es ejemplo de ello.

La implementación de software para el trazado de las figuras de Lissajous en 3D la realizamos en *Pure Data*, con ayuda de la librería gráfica GEM -desarrollada por Mark Danks- que forma parte de la versión del entorno denominado *PD-extended*.



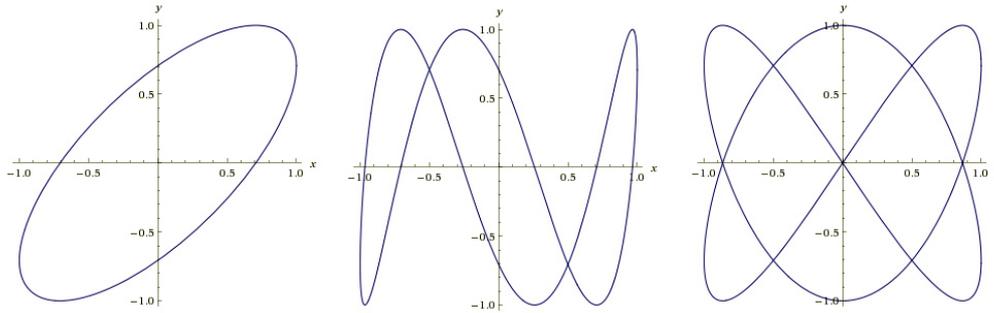
**Figura 3.** Objeto *Lissa3d* para generar trayectorias a partir de figuras de Lissajous

Los parámetros a controlar en el programa son la frecuencia con la que se repetirá la trayectoria generada, su amplitud, los índices de frecuencia de las sinusoides que determinan los valores de las coordenadas sobre cada eje ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) y las fases iniciales. También es posible rotar la imagen sobre los ejes para apreciar la forma 3D -ya que la vemos proyectada sobre un plano-, invertir los signos de los ejes y determinar una circunferencia sobre el plano horizontal para comprobar auditivamente el sistema. Estos programas pueden ser modificados por el usuario de acuerdo a sus necesidades. En la programación se privilegió la sencillez, dado que originalmente persiguen un fin didáctico.

Las figuras de Lissajous en 2D también es posible generarlas mediante este *patch*, poniendo el índice de frecuencia correspondiente a la coordenada  $z$  en 0, y su fase inicial en 0.25, que equivale a  $\pi/2$ <sup>7</sup>. De este modo aparecerán representadas las curvas características que se muestran en la figura 4.

---

<sup>7</sup> En este programa empleamos osciladores que producen una cosinusoide. La fase se controla con un valor entre 0 y 1, que corresponde a un ángulo de fase entre 0 y  $2\pi$  radianes. Al poner la frecuencia en 0 Hz y la fase en  $\pi/2$ , la amplitud de la componente  $z$  queda en cero.



**Figura 4.** Figuras de Lissajous con relaciones de frecuencia 1:1, 1:3, 2:3 y desfase  $\pi/4$

Para poner en práctica las trayectorias en 3D podemos recurrir al sistema *Ambisonics*<sup>8</sup>, decodificando la señal para 8 parlantes dispuestos en un cubo. De este modo, obtendremos una simulación de fuentes virtuales en tres dimensiones, fácilmente programable en *PD*.

### Hipotrocoides y epitrocoides

Una hipotrocoide es una curva plana que resulta del movimiento de un punto ubicado en un círculo que rueda dentro de una circunferencia de mayor tamaño. Si denominamos  $R$  al radio de la circunferencia mayor,  $r$  al radio del círculo que gira en su interior, y  $d$  a la distancia entre el punto que traza la curva y el centro del círculo, la resultante queda definida por

$$x = (R - r) \cos \theta + d \cos \left( \frac{R - r}{r} \theta \right)$$

$$y = (R - r) \sin \theta - d \sin \left( \frac{R - r}{r} \theta \right)$$

Algunos casos particulares de la hipotrocoide son la elipse, que se traza cuando  $R = 2r$ , y la hipocicloide, que ocurre cuando  $d$  es igual a  $r$ . La figura siguiente muestra una hipotrocoide en la cual  $d$  es mayor que  $r$ .

<sup>8</sup> [http://www.york.ac.uk/inst/mustech/3d\\_audio/ambis2.htm](http://www.york.ac.uk/inst/mustech/3d_audio/ambis2.htm)

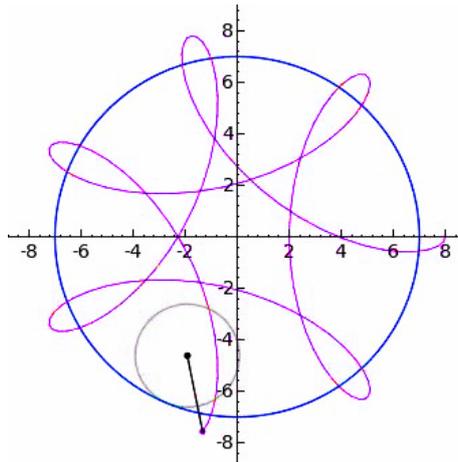


Figura 5. Hipotrocoide

Por otra parte, la epitrocoide es la curva que resulta del movimiento de un punto ubicado en un círculo que rueda por fuera de una circunferencia. Aquí también denominamos  $R$  al radio de la circunferencia fija,  $r$  al radio del círculo que gira en su exterior, y  $d$  a la distancia entre el punto que traza la curva y el centro del círculo que rueda. La resultante queda definida por la siguiente ecuación paramétrica.

$$x = (R + r) \cos \theta - d \cos \left( \frac{R + r}{r} \theta \right)$$

$$y = (R + r) \sin \theta - d \sin \left( \frac{R + r}{r} \theta \right)$$

Como habrán notado, estas curvas son las que produce un famoso juego<sup>9</sup> que se remonta a mediados de la década de 1960 y que aún sigue vigente, conocido como “espirógrafo”<sup>10</sup>.

Algunas figuras que resultan del empleo del espirógrafo son en sí mismas curvas notables, como la astroide, la deltoide, la nefroide o la cardioide, todas ellas pertenecientes a la familia de las hipocicloides.

A fin de que podamos experimentar la utilización de estas curvas en el trazado de trayectorias recurriremos una vez más a la programación en *Pure Data*.

<sup>9</sup> Una interesante versión on-line de este juego puede verse en <http://nathanfriend.io/inspirograph>

<sup>10</sup> El *Spirograph*, tal cual lo conocemos, fue desarrollado por el ingeniero británico Denys Fisher, y puesto a la venta en 1965. Sin embargo, existen referencias de juegos similares que se remontan a principios del siglo XX, o incluso fines del XIX. Las curvas que genera fueron estudiadas por Leibniz y Newton, entre otros, en el siglo XVII.

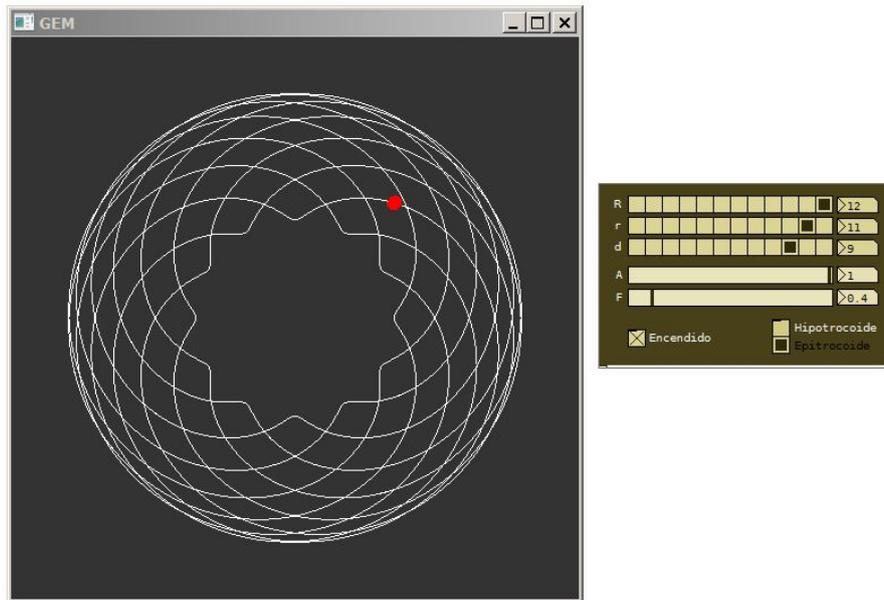


Figura 6. Objeto *espirografo* para generar trayectorias a partir de hipo y epitrocoides

El objeto de PD, que denominé *espirografo*, permite generar hipotrocoides y epitrocoides, como las que surgen del juego geométrico mencionado. Sin embargo, aquí se da preferencia a las relaciones entre parámetros que producen una curva cerrada (el fin coincide con el principio).

A través del panel se puede especificar  $R$ ,  $r$ ,  $d$ , la amplitud del gráfico, la frecuencia de barrido de la curva y elegir las ecuaciones correspondientes a la hipotrocoide o a la epitrocoide.

### Movimientos amortiguados

Al mencionar la ecuación característica empleada por Chowning para trazar trayectorias, vimos que se trataba de la combinación de dos movimientos complejos perpendiculares entre sí, formados cada uno por la suma de dos movimientos sinusoidales.

$$x(t) = a_1 \cdot \cos(2\pi f_{x1} t + \delta_{x1}) + a_2 \cdot \cos(2\pi f_{x2} t + \delta_{x2})$$

$$y(t) = b_1 \cdot \cos(2\pi f_{y1} t + \delta_{y1}) + b_2 \cdot \cos(2\pi f_{y2} t + \delta_{y2})$$

Pero qué ocurriría si los movimientos armónicos simples que conforman el sistema representado por la ecuación anterior fueran amortiguados.

A fines del siglo XIX comienzan a emplearse –con fines recreativos- aparatos mecánicos capaces de dibujar complejas formas sobre un papel, valiéndose solamente de un pequeño empujón inicial en sus péndulos y de la fuerza de gravedad. La invención de este dispositivo, denominado *harmonograph* se atribuye a Hugh Blackburn (1823-1909), profesor de matemática de la Universidad de Glasgow.

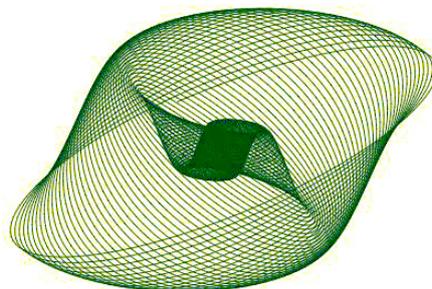
El *harmonograph* más simple consta de dos péndulos que oscilan perpendicularmente. Uno mueve un lápiz hacia delante y hacia atrás, mientras que el otro mueve la superficie donde se ubica el papel, de forma transversal. De no existir amortiguamiento, el aparato podría dibujar las figuras de Lissajous en dos dimensiones, tal cual las realiza un osciloscopio, o nuestro software. No obstante, por tratarse de un dispositivo mecánico, las fuerzas de rozamiento asociadas producen un movimiento amortiguado que torna más complejos los gráficos obtenidos, dado que la amplitud de las sinusoides decrece a medida que el tiempo transcurre.

Existen *harmonographs* aún más elaborados, cuyos péndulos oscilan en dos dimensiones, y otros que incluso utilizan un tercer péndulo<sup>11</sup>, dos para el movimiento del lápiz, y el otro para el movimiento de la superficie de dibujo.

La formalización de un *harmonograph* puede establecerse a partir de las ecuaciones antes vistas, a las que agregamos una variación de la amplitud en función del tiempo. Para imitar el amortiguamiento del péndulo multiplicamos la amplitud por el factor  $e^{-dt}$ , en el cual  $e$  es la constante conocida como número de Euler (igual a 2.71828182845...),  $d$  es un coeficiente de amortiguamiento (entre 0 y 1) y  $t$  es el tiempo. La ecuación paramétrica queda, entonces, modificada del siguiente modo:

$$x(t) = a_1 \cdot \cos(2\pi f_{x1} t + \delta_{x1}) e^{-dt} + a_2 \cdot \cos(2\pi f_{x2} t + \delta_{x2}) e^{-dt}$$

$$y(t) = b_1 \cdot \cos(2\pi f_{y1} t + \delta_{y1}) e^{-dt} + b_2 \cdot \cos(2\pi f_{y2} t + \delta_{y2}) e^{-dt}$$



**Figura 7.** Figura característica dibujada por un *harmonograph*.

La figura 8 muestra la implementación en *PD* del *harmonograph*. Se trata del objeto *armonografo.pd*. Los parámetros a controlar son las frecuencias, amplitudes y fases de las cuatro sinusoides, el número de ciclos a dibujar, y la cantidad de ciclos por segundo (frecuencia) en la reproducción de la trayectoria. El panel muestra, además, el tiempo que dura el desarrollo del recorrido propuesto.

<sup>11</sup> Un proyecto interesante de construcción de un *harmonograph* puede verse en <https://johncarlosbaez.wordpress.com/2014/07/18/the-harmonograph>

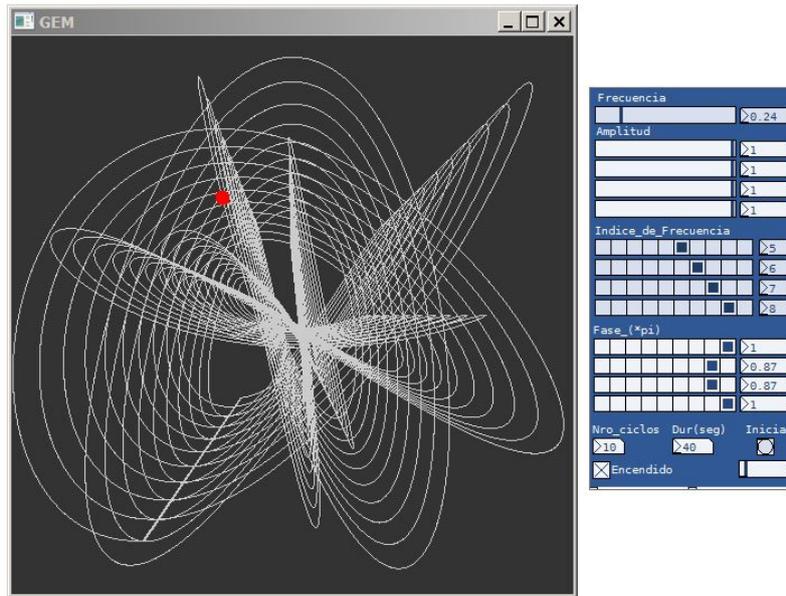


Figura 8. Objeto *armonografo* para generar trayectorias a partir de la modelización del dispositivo mecánico.

## Espirales

Dado que las espirales poseen un radio variable en función del ángulo es común establecer sus ecuaciones en forma polar<sup>12</sup>. Vamos a mencionar algunos casos bien conocidos, y sus ecuaciones polares, para luego implementarlos a través de un programa en *PD*.

<i>Espiral de Arquímedes</i>	$r = \theta + a$
<i>Espiral hiperbólica</i>	$r \cdot \theta = 1$
<i>Espiral lituus</i>	$r^2 \cdot \theta = 1$
<i>Espiral de Fermat</i>	$r^2 = \theta$
<i>Cocleoide</i>	$r = \sin \theta / \theta$
<i>Espiral de Cotes</i>	$r = 1 / \cosh(a\theta)$
<i>Espiral de Bernoulli</i>	$r = e^{a\theta}$
<i>Espiral de Poincot</i>	$r \cdot \sinh(a\theta) = 1$ o bien $r \cdot \cosh(a\theta) = 1$
<i>Espiral sinusoidal</i>	$r^a = \sin(a\theta)$

<sup>12</sup> La posición de un punto en un plano se puede establecer por medio de coordenadas polares, quedando ésta definida mediante una distancia y un ángulo  $(r, \theta)$ .

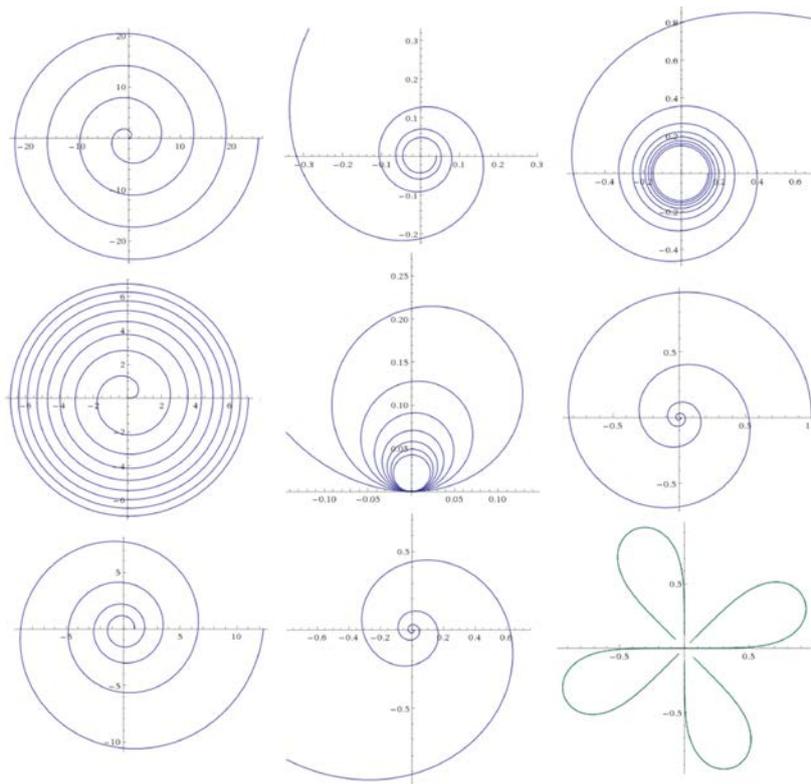


Figura 9. Gráficos correspondientes a las espirales anteriormente listadas.

En el último caso, el de la espiral sinusoidal, ciertos valores de la variable  $a$  generan a su vez otras curvas notables, cuyos nombres se describen a continuación:

$a$	Nombre
-2	Hipérbola
-1	Recta
-1/2	Parábola
-1/3	Cúbica de Tschirnhausen
0	Espiral logarítmica
1/3	Séxtica de Cayley
1/2	Cardioide
1	Círcunferencia
2	Lemniscata de Bernoulli
3	Curva de Kiepert

El trazado de trayectorias a partir de las ecuaciones vistas se puede experimentar mediante el objeto *espirales.pd* (ver figura 10). Como en varios casos las espirales se concentran en el origen de

coordenadas, hemos agregado la posibilidad de trasladarlas sobre los ejes  $x$  e  $y$ , a fin de alejarlas del punto  $(0, 0)$ . Como sabemos, la ubicación de una fuente sonora virtual sobre el origen de coordenadas es problemática dado que su distancia es nula. Durante la simulación, al calcular la caída de amplitud con la distancia, la división por un número menor que uno genera un incremento indeseable de la sonoridad, mientras que la división por cero produce directamente un error de cálculo, por tratarse de una operación no definida. En el caso de una simulación mediante *intensity panning*, la unidad corresponde a la distancia entre el oyente y los parlantes. Dado que no podemos evitar el paso de la fuente a través del círculo de radio unitario, en nuestro espacializador mantenemos una distancia mínima de uno, aun cuando las coordenadas indiquen lo contrario.

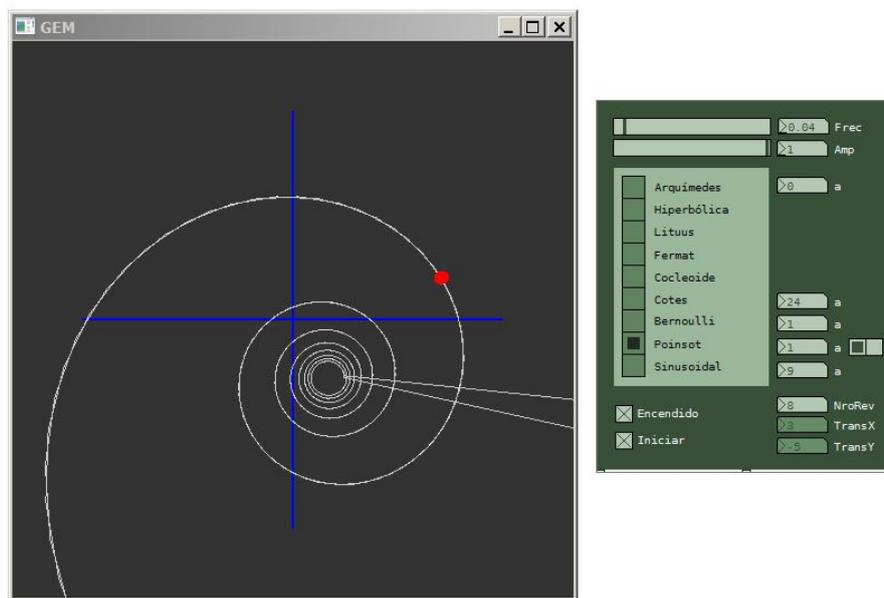


Figura 10. Objeto *espirales* para generar trayectorias a partir de sus ecuaciones.

### Combinación de trayectorias y espacialización

Los objetos destinados a la generación de trayectorias pueden combinarse, entre sí o bien mediante la creación de varias instancias del mismo objeto. De esta manera, podemos simular trayectorias diferentes para cualquier número de fuentes sonoras, la única limitación es la capacidad de procesamiento de nuestra computadora. En la figura 11, y a modo de ejemplo, se observan los objetos *lissa3d* y *armonografo*, produciendo cada uno una trayectoria distinta, pero en simultaneidad.

Comenzamos haciendo referencia al empleo de la figuras de Lissajous en la obra de John Chowning, Ahora finalizaremos nuestro breve recorrido a través de las curvas notables poniendo en práctica la localización espacial del sonido mediante la versión en tiempo real del sistema de espacialización cuadrafónico desarrollado por el compositor.

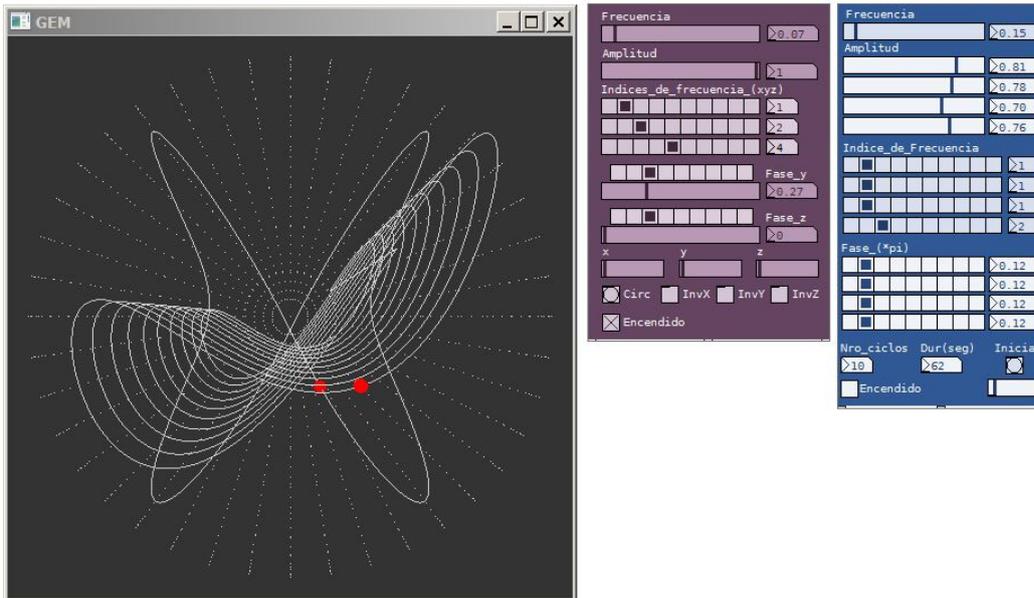


Figura 11. Dos Fuentes virtuales siguiendo distintas trayectorias.

La figura 12 muestra la conexión de la abstracción de localización, denominada *turenas.pd*, con el armonógrafo. La programación puede analizarse abriendo el objeto y observando sus características. Entre ellas, la creación de una tabla que almacena los valores de ganancia de cada parlante en función del ángulo de lateralización, tal como lo ideó su autor, con el propósito de ahorrar tiempo de procesamiento al evitar los reiterados cálculos de las funciones seno y coseno.

El objeto de espacialización recibe, de izquierda a derecha, la señal de audio monofónica a procesar, las coordenadas  $x$  e  $y$ , el nivel de reverberación (entre 0 y 1) y el tamaño del auditorio (en un número abstracto entre 0 y 1). *turenas* puede modificarse muy fácilmente para admitir coordenadas polares, dado que es el tipo de coordenadas con las cuales trabaja internamente.

Entre los parámetros modificables del objeto observamos la “distancia entre el sujeto y los parlantes”, que debe ser expresada en metros. Esa distancia constituye la unidad de medida a considerar en relación con los valores de las coordenadas. Si las coordenadas polares, por ejemplo, indican que la distancia entre la fuente y el oyente es de 3 unidades, y la distancia entre los parlantes y el oyente fue establecida en 4 metros, significa que la fuente se halla a 12 metros del oyente.

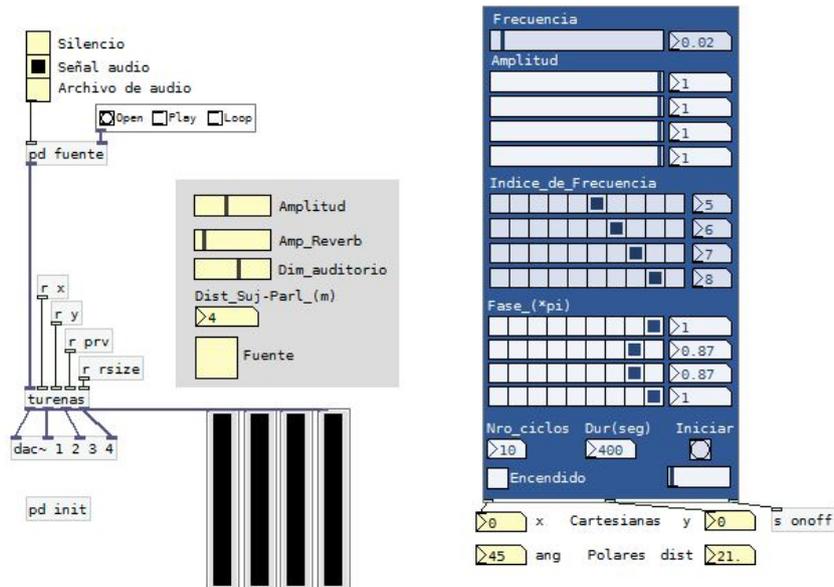


Figura 12. Modelo de localización de Chowning y trazado de trayectorias empleando ecuaciones de curvas notables.

## Conclusiones

La utilización de ecuaciones paramétricas y polares en la determinación de los recorridos de fuentes virtuales en ambientes simulados aporta no sólo elementos de estructuración del espacio sonoro, sino también propone alternativas para el tratamiento y organización de diversos parámetros como la altura, la tonicidad del sonido, los niveles de consonancia-disonancia de las redes interválicas, la distribución de eventos en el registro y en el tiempo, las texturas y toda variable involucrada en los procesos de síntesis y transformación del sonido y la música.

## Bibliografía

Cetta, Pablo. *Un modelo para la simulación del Espacio en Música*. Editorial Educa. Buenos Aires. 2007.

Chowning, John. "The Synthesis of Complex Audio Spectra by Means of Frequency Modulation". *Journal of the Audio Engineering Society* 21, pp. 526–534. 1973.

Chowning, John. "The Simulation of Moving Sound Sources". *Journal of the Audio Engineering Society* 19, pp. 2-6. 1977.

Pottier, Laurent. "Analyse de Turenas". John Chowning. Col. Portraits Polychromes. Paris. INA-GRM. 2004.

Disponible en <http://www.institut-national-audiovisuel.fr/sites/ina/medias/upload/grm/portraits-polychromes/extraits/chowning/index.html>. Última consulta: 5 de agosto de 2015.

Wassenaar, Jan. *Mathematical curves*. 2013. Versión electrónica disponible en <http://www.2dcurves.com>. Última consulta: 5 de agosto de 2015.